

NHK スペシャル 「神の数式」 完全版

2014年2月10日

第1回：2013年12月24日(火) 午後7時00分～7時50分

第2回：2013年12月25日(水) 午後7時00分～7時50分

第3回：2013年12月26日(木) 午後7時00分～7時50分

第4回：2013年12月27日(金) 午後7時00分～7時50分

第1部

この世は何からできているのか

～美しさの追求 その

成功と挫折～

1 数式による自然現象の説明の例

1.1 オーロラの色

$$\nu \sim R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$n \leq m, \quad R = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 h c a_B} = 1.09737 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad \left(\nu = \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 5.29177 \times 10^{-11} \text{ m}$$

1.2 大気の動き

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho K - \text{grad } p + \frac{1}{3} \eta \text{grad}(\text{div } v) + \eta \nabla^2 v$$

1.3 電磁気

$$\text{div } H = 0, \quad \text{rot } E + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } E = \rho, \quad \text{rot } H - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c} \rho v$$

$$\left(\begin{array}{l} \nabla \cdot H = 0, \quad \nabla \times E + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot E = \rho, \quad \nabla \times H - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c} \rho v \end{array} \right)$$

対称性の自発的破れ：完璧な美しさは崩れる運命にある（南部陽一郎）

Theory of Everything: 万物の理論

2 神の数式（CERN の裏側にある岩に刻み込まれている）

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \partial \psi \\ & - g_1 \bar{\psi} \mathbf{B} \psi - \frac{1}{4} \mathcal{B}^{\mu\nu} \mathcal{B}_{\mu\nu} \\ & - g_2 \bar{\psi} \mathbf{W} \psi - \frac{1}{4} \mathcal{W}^{\mu\nu} \cdot \mathcal{W}_{\mu\nu} \\ & - g_3 \bar{\psi} \mathbf{G} \psi - \frac{1}{4} \mathcal{G}^{\mu\nu} \cdot \mathcal{G}_{\mu\nu} \\ & + \bar{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c. \\ & + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \end{aligned}$$

2.1 基本素粒子 (第1世代)

$$\bar{\psi} \partial \psi$$

e : 電子、 ν : ニュートリノ、 u : クォーク (アップ)、 d : クォーク (ダウン)・・・フェルミ粒子

ポール・ディラックが、当時すでに唯一発見されていた「電子」の性質を表す、

2.1.1 シュレディンガー方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$$

を適用したが、それだけでは説明できない部分があることが判明。

電子のスピン (自転) と磁性の存在。

数式の「対称性」という美しさを求める理論物理学者。

2.1.2 円の数式

$$x^2 + y^2 = r^2$$

座標軸を回転させても、数式が「不変」(回転対称性)。

2.1.3 縞模様の数式

$$y = px + nq, \quad n \in \mathbb{Z}$$

座標軸を平行移動させても、数式が「不変」(並進対称性)。

先ほどの円の数式は、座標軸を平行移動させると、大きく形が変わってしまい、並進対称性はもたない。

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2$$

「対称性」とは、見る人の視点が変わっても、もともとの形や性質は変わらないということ。

ディラックがこだわった、もう一つは、「ローレンツ対称性」(時間と空間は本質的には同じもの)。

シュレディンガー方程式は分母に「時間」が1つ (t)、「空間」が2つ (x^2) 現れ、ローレンツ対称性をもっていないため、視点が変わると数式の形が大きく変わってしまう。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{1}{2m}\sum\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \frac{v}{m}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\psi + \dots\dots$$

2.1.4 ディラック方程式 (相対論的量子力学)

電子の数式は、自然単位系 ($\hbar = 1, c = 1$) で、

$$i\gamma\frac{\partial}{\partial t}\psi + i\sum\gamma\frac{\partial}{\partial x}\psi = m\psi$$

または

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}.$$

ガンマ行列

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (\hat{\mathbf{1}}, \hat{\sigma}^j), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\hat{\mathbf{1}}, -\hat{\sigma}^j)$$

は次を満たす。

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

ディラック方程式は、時間と空間が1つずつ現れ(次元が同じ)、回転対称性、並進対称性、ローレンツ対称性の3つを満たす。

この式は、電子のスピン(自転)と磁気能率(磁石、magnetic moment)を正確に説明するとともに、陽電子(反粒子、反物質)の存在を予言した。

さらに、その後発見されたニュートリノやクォークをも説明しうることになった。

ディラック方程式は、神の数式の1行目に、コンパクトにまとめられた。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \partial \psi - \bar{\psi} M \psi$$

2.2 素粒子を原子核に留めさせたり動かしたりしている力

電磁気力

$$-g_1 \bar{\psi} \mathbf{B} \psi - \frac{1}{4} \mathcal{B}^{\mu\nu} \mathcal{B}_{\mu\nu}$$

弱い核力 (ニュートリノを原子核から飛び出させる)

$$-g_2 \bar{\psi} \mathbf{W} \psi - \frac{1}{4} \mathcal{W}^{\mu\nu} \cdot \mathcal{W}_{\mu\nu}$$

強い核力

$$-g_3 \bar{\psi} \mathbf{G} \psi - \frac{1}{4} \mathcal{G}^{\mu\nu} \cdot \mathcal{G}_{\mu\nu}$$

ヒッグス粒子

$$\begin{aligned} & + \bar{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c. \\ & + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \end{aligned}$$

h.c.: there are additional terms which are the hermitian conjugate of the terms that have already been written

まず電磁気力に注目したディラック、ロバート・オッペンハイマーらが、「ゲージ対称性」を導入。回転対称性に類似し、時空の各点が独立にもっている対称性。電磁気の大きさを測定する分度器のようなものが各点にあり、その角度を変えても数式の形が変わらないというもの。

$$-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

2.2.1 電磁気力

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\partial\psi - \bar{\psi}M\psi - g\bar{\psi}\mathbf{A}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

(1 行目 : 基本素粒子、 2 行目 : 電磁気力)

4 つの対称性、回転対称性・並進対称性・ローレンツ対称性・ゲージ対称性をもつ式により、電磁気力を説明。

電子は光子をやり取りして原子核と結びつけられている、という結果が導き出される (力は粒子が伝達)。

ところがこの式から、電子のエネルギーは ∞ (無限大) になるという問題が浮上。素粒子の自己エネルギーが計算できない。

オッペンハイマー「場と物質の相互作用の理論について」(1930)。

これを解決できないまま、マンハッタン計画が開始。

「原爆の父」と名付けられたオッペンハイマーが、後悔で復帰できなかったところへ、1948年に朝永振一郎が書簡を送る。戦争中に「無限大の問題」を解決する方法を見つけていたが、欧米に発表する機会を奪われていた。

昭和18年6月「場の量子論の相対律的な定式化について」。

オッペンハイマーはそれを権威ある専門誌に発表するよう勧めた。

朝永「量子場理論での無限大の反作用について」(1948)。

無限大は「くりこみの手法」で取り除くことが出来る。

同時期にリチャード・ファインマン、ジュリアン・シュウィンガーらも同等の理論を発表 (くりこみ理論)。

「無限大の部分は、全部質量の中にくりこむことが出来て、残りは有限だという結論になった。いろいろな無限大の間の関係がはっきりしてきた」

電子の磁気力の理論値 = 2.0023193043...

同実験値 = 2.0023193043...

実験結果と極めて一致したことで、電磁気力の解明が完成 (2 行目)。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\partial\psi - \bar{\psi}M\psi \quad \text{基本素粒子}$$

$$-g\bar{\psi}\mathbf{A}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad \{ \text{電磁気力} \}$$

ディラック以来の「対称性という美に従えば正しい数式を構築できる」という信念。

1950年代、チェンニン・ヤンが「強い核力」と「弱い核力」を美しい式で記述することを試みた。

陽子と中性子の不思議な共通点と、原子核の中では陽子と中性子が次々と入れ替わっていて両者を区別することに意味はないということもわかってきた。

| | P | N |
|----|----------|----------|
| 電荷 | +e | 0 |
| 質量 | 938.3MeV | 939.6MeV |

ちなみに、現代物理学では、 $P = (udd)$, $N = (uud)$ という素粒子からできているため、そっくりだということになっている。(u: アップクォーク、d: ダウンクォーク)

ヤンはミルズと研究し、原子核の中の力の数式があるならば、その式には陽子と中性子を入れ替えても変化しないという性質があるのではないかと考えた。

ゲージ対称性を発展させ、「非可換ゲージ対称性」(量子色力学)を適用(ヤン ミルズ理論)。

ヤン「荷電スピンの保存とゲージ不変性」(1954)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathbf{f}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{f}_{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial_{\mu} - i\epsilon\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}_{\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi.$$

回転、並進、ローレンツ、ゲージ、非可換ゲージ対称性を満たす。これをそうそうたる物理学者たちの前で解説したヤンに対し、パウリが「その力を伝える粒子の質量はどのくらいか？」と突っ込んだ。ヤンとミルズは答えに窮した。ヤンらの理論で計算すると、その粒子の質量はゼロとなってしまう。

これを現在の表現で書くと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}i\partial\psi - \bar{\psi}M\psi && \text{基本素粒子} \\
&-g_1\bar{\psi}\mathbf{B}\psi - \frac{1}{4}\mathcal{B}^{\mu\nu}\mathcal{B}_{\mu\nu} && \text{電磁気力} \\
&-g_2\bar{\psi}\mathbf{W}\psi - \frac{1}{4}\mathcal{W}^{\mu\nu}\cdot\mathcal{W}_{\mu\nu} && \text{弱い核力} \\
&-g_3\bar{\psi}\mathbf{G}\psi - \frac{1}{4}\mathcal{G}^{\mu\nu}\cdot\mathcal{G}_{\mu\nu} && \text{強い核力}
\end{aligned}$$

となる。ヒッグス粒子を除く全部が揃ったとされた。

ところが、数式の美しさを追い求めていくと、この世の全ての物質に重さがあってはならない、という大問題を惹起した。全ての物質に重さがなければ、原子はバラバラになりこの世の物質が存在できないことになってしまう。ヤンの理論の数式に重さを後から書き加えればいいという学者もいたが、美しい対称性が台無しになってしまうという大きな問題が出る。

「強い力」と「弱い力」の原因となる力の粒子（ボソン）の質量が、どう計算してもゼロになってしまうことが判明。光子以外は質量をもつはずであり、核の中で力を伝える粒子は重いはずであった。ここから「基本素粒子」の全てが質量ゼロという結果を導いてしまう。研究は未解決のまま遠ざかって行った。

「重さの謎」が残された。

第 II 部

“重さ”はどこから生まれるのか ~ 自発的対称性の

破れ 驚異の逆転劇 ~

50 年間追い求められていたヒッグス粒子の発見で、2013 年 12 月、ピーター・ヒッグスがノーベル賞授賞式に。

1957 年、ソ連が人類初の人工衛星スプートニクを打ち上げ、スプートニク・ショックを巻き起こした年、物理学の基本概念が覆された実験の記事が NY タイムズに掲載される。

ウー「ベータ崩壊におけるパリティ保存の検証」(1957)

コバルト 60 の原子核を並べ、そこから弱い核力で飛び出してくる電子を観察したところ、それは全て「左巻き」に自転していたというもの（進行方向の後ろ側から見て反時計回り = 左手の法則）。これは弱い核力を感じるのは「左巻きの素粒子」だけということの意味する。つまり、同じ電子でも左巻きの電子と右巻きの電子は、力の感じ方が異なる。

これは物理学界で大論争になった。これまでの原子や原子核の実験では右と左の区別はないとされてきたからである。

カイラル（手のひら）対称性

自然界には左巻きの粒子と右巻きの粒子を区別するもう 1 つの対称性がある。

↓

電子、ニュートリノ、クォークという物質の基本粒子が全て重さを持たないことになる。

カイラル対称性とは、ゲージ対称性とは異なる 2 つの分度器があり、それらの分度器をどう回転させても数式は変化しないということの意味する。しかし、左巻の分度器を β だけ回転させると、基本素粒子 (e, ν, u, d) が重さを持つことを表す数式が、

$$\bar{\psi} M \psi \Rightarrow e^{-i\beta} \bar{\psi}_L M \psi_R + e^{i\beta} \bar{\psi}_R M \psi_L$$

となり、回転の前後で対称性が変わらないためには質量がゼロでなければならない。

もし力を伝える粒子だけでなく、物質の基本素粒子にも重さがないとしたら、原子から電子が飛び出し、バラバラになってしまう。全てが光の速さで飛び散る。

「対称性という美しさに従えば、正しい数式に辿り着ける」と信じてきた物理学者たちの信念は崩れ去った。全ての謎が解かれるためには、ヒッグス粒子の発見を待たねばならなかった。

1960年代シカゴ大、南部陽一郎が「美しさに導かれると、なぜか重さがゼロになる」という大きな矛盾を解決する。31歳で渡米した南部は、素粒子に限らず物理学全体の視野の広さ（超伝導、流体力学、類推などをいつも考えている）を持ち、大きなブレークスルーをもたらすこととなる。

鉛筆が倒れる現象が、重さの謎を解くヒントになると気づいた。

「鉛筆を立てる」設計図上では回転対称性があるのに、現実では回転対称性はない（鉛筆は倒れる）。

↓

「自発的対称性の破れ」

自然界の設計図に対称性があったとしても、我々が観測する物理現象には、その対称性がなくてもよい、ということ。すなわち、自然現象を記述する数式に対称性があっても、その数式から導かれる現実には対称性がなくともよい。

南部「超伝導の類推による素粒子の動的模型」（1961）。

「強い核力」の設計図

$$g_3 \bar{\psi} \mathbf{G} \psi$$

↓

$$g_3 (\bar{u} \mathbf{G} u + \bar{d} \mathbf{G} d)$$

（クォーク u と d が見えている。バー付きは反粒子）。カイラル対称性により、クォークの質量 $m = 0$ でなければならない。

しかし、設計上で $m = 0$ であっても、現実では $m \neq 0$ でよい（質量が生まれる）と、

南部は見抜いた。「完璧な美しさは崩れる運命にある」。

強い核力の設計図から重さが生まれるメカニズムはどのようなものか。

まず、強い核力の数式によると、我々の身の回りの空間では、クォークとその反粒子のペアが生まれては消えるという現象が起こっている。この時、カイラル対称性があるために、左巻きのクォークと右巻きのクォークが互いに入り乱れて反応することはない。南部が発見したのは、強い核力がもつカイラル対称性が自発的に破れるという事実であった。このため、ごちゃ混ぜにならないはずの右巻きと左巻きのクォーク同士が、現実にはくっついてしまい、異常なペアとして空間中に消えずに残る。しかも、この異常なペアがどんどん増え、空間を埋め尽くす（クォークペアの沈殿）。これが真空の正体である。

$$u_R \iff \bar{u}_R + u_L \iff \bar{u}_L$$

$$u_R + \bar{u}_L \quad \bar{d}_R + d_L \quad d_R + \bar{d}_L$$

次に、カイラル対称性の自発的破れがクォークの重さを生む理由。

我々の回りの空間にクォークのペアが詰まっているなら、例えば1つのクォークが真空中を飛ぶと、空間に詰まった粒子と次々に反応し、右巻きと左巻きとが入れ替わりながら、ジグザグに移動していく。重さをもたないはずのクォークは真空によって行く手を阻まれることになり、光の速さでは飛べなくなる。この動きにくさこそが重さ（質量）の正体である。これが、南部が到達した驚くべき結果である。

残ったのは、「弱い核力」の原因である粒子、電子、ニュートリノの質量が、まだゼロとなること。南部が強い核力でやったようには、弱い核力の数式から自動的に重さを導き出すことは不可能であった。

$$g_2 \bar{\psi} \mathbf{W} \psi$$

1960年代前半、シェルドン・グラショウがこの難問に正面から取りかかった。

弱い力を伝える粒子は、 W と Z と名付けられる2つに分けられると指摘。しかしその重さが何故生じるのか説明できなかった。

W⁺ W⁻ Z

それを引き継いだスティーブン・ワインバーグ（1979 物理学賞）は、クォーク以外の粒子に質量を持たせるため、「自発的対称性の破れ」を応用し、都合の良い「ヒッグス粒子」の存在を「仮定」した。

ある種の新しい場、力というものを持ち込んだ。それが、何も無い真空中をびっしりと埋め尽くし、宇宙全体に広がっている、というもの（「粒子」が埋め尽くしているといっているのではないことに注意）。これが自発的対称性を破る。ワインバーグが参考にした論文ヒッグス「ゲージ粒子の質量と対称性の破れ」（1964）。

（本日 2013/10/8、ノーベル物理学賞の 1 人にピーター・ヒッグスが選ばれた。昨年、CERN の加速器でヒッグス粒子が初めて観測されていた。ヒッグスの受賞とワインバーグの受賞の順番や時期の大きな隔たりは、ヒッグス粒子の存在検証ができていなかったから。）

ある都合のいい粒子を持ち込めば、数式の対称性を保ったまま、素粒子が質量を獲得することができる、というもの。その粒子は、最初は空間にほとんど存在しないにもかかわらず、その後、勝手に空間を埋め尽くすようになる性質を持つ（対称性の破れ）。

この粒子（ヒッグス場）に阻まれ、電子などが動きづらくなる。この動きにくさが質量の正体である。（注：この説明は誤り）

ワインバーグ「軽粒子の一つの模型」（1967）。

（ワインバーグ サラム模型）

しかし、ヒッグス粒子の数式は美しくなかった。南部もヒッグス粒子は都合が良すぎると否定的であり、ホーキングは根拠の乏しい仮定によるヒッグス粒子は実在しないと発言していた。

1983 年、CERN でワインバーグが予言した弱い核力の粒子（W と Z）が発見された。

数式を美しくしたのは天才トフーフト。ヤン ミルズ理論の「くりこみ」を成功させたあと、ヒッグス場によって対称性が自発的に破れた場合にも「くりこみ」が可能となることを

証明し、ワインバーグ サラム模型にも「場の量子論」が使えることを示した。

「標準理論」(冒頭の数式)の一応の完成。

さらに、重力を取り込んだ理論が必要、とワインバーグ。つまり、一般相対性理論との統合。

(第1夜完)

第 III 部

宇宙はなぜ始まったのか ~残された“最後の難問”~

DAS WAHRE IST GOTTHNLICH (真理は神のごとく)

$$U = \frac{M_{\odot}}{r} \left(1 - J_2 \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right)$$

究極の難問：宇宙はなぜ始まったか

謎を解く鍵、ブラックホールの奥底が、宇宙誕生の瞬間と数学的に同じと証明された。

偉大な2つの数式の1つ、

3 標準理論 (素粒子の数式)

$$\mathbf{Z} = \int [DA] [D\psi] [D\phi] \exp \left[i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (i\bar{\psi} \mathbf{D}\psi + h.c.) + (\psi_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c.) + |D_{\mu}\phi|^2 - V(\phi) \right] \right]$$

3.1 ミクロの世界の計算であることを表す部分

$$\mathbf{Z} = \int [DA] [D\psi] [D\phi] \exp[i \int d^4x$$

3.2 物質と様々な力の部分 (ミクロの物質やそこに働く力)

$$\left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (i\bar{\psi} \mathbf{D}\psi + h.c.) + (\psi_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c.) + |D_{\mu}\phi|^2 - V(\phi) \right]$$

もう1つの数式、

4 一般相対性理論（重力の数式）

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{空間のゆがみ}} = \underbrace{\kappa T_{\mu\nu}}_{\text{物の重さ・エネルギー}}$$

μ, ν : 座標、 $R_{\mu\nu}$: 空間のゆがみ、 $g_{\mu\nu}$: 距離（の計量）、 R : 空間のゆがみ（スカラー）、 κ : 比例定数、 $T_{\mu\nu}$: 質量・エネルギー

小さくて重いほど、空間の歪みが大きくなる。

とてつもなく重く小さな点があったら、空間はある1点に向かって無限に沈み込んで行くはず（理論上のブラックホール）。

4.1 ブラックホールの数式（一般相対論の弱点）

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

↓

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48G^2 M^2}{c^4} \times \frac{1}{r^6}$$

↓

$$D_{\text{distortion}} \propto \frac{1}{r^3}$$

D : 空間のゆがみ、 r : 奥底との距離

ところがブラックホールの奥底では、

$$D_{\text{distortion}} = \frac{1}{0^3} = \infty$$

つまり、「計算不能」となり、一般相対性理論の数式が通用しない。ブラックホールの底だけは説明できない。(スティーブン・ホーキング)それが分からないと宇宙の始まり(ビッグバン)が分からない。

4.2 一般相対性理論(重力) + 素粒子の数式 = 宇宙誕生の謎

マトベイ・ブロンスタインの式(超ミクロの空間に一般相対論を組み込み)

$$\mathbf{Z} = \int [Dg] [DA] [D\psi] [D\phi] \exp \left[i \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (i\bar{\psi} \mathbf{D}\psi + h.c.) + (\psi_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c.) + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \right] \right]$$

すべての粒子が「点」であることを意味する部分

$$i \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (i\bar{\psi} \mathbf{D}\psi + h.c.) + (\psi_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c.) + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \right]$$

↓

$$\frac{1}{0} = \infty$$

さらにミクロな空間で再計算したら、無限大の部分が増えてしまう。無限大が無限大個発生してしまう。偉大な数式のそれぞれは正確なのに、一緒にするとうまく働かない。身の回りが無限大に満ちあふれている？

ブロンスタイン「重力波の量子化について」(1936)

「この矛盾を取り除くには、理論を根底からかえなければならないだろう」

ブロンスタインを含めた自由な思考をする科学者等がスターリンの秘密警察に逮捕・処刑された(31歳)。(共産主義のトップに立った者が自分より能力のある者を肅正・大虐殺を行うことは、ソ連のスターリンから始まり、中国・毛沢東の文化大革命、カンボジアのポル

ポト、北朝鮮など数えきれない。愚民の王。それはヒトラーやムッソリーニなどの独裁者とは意味が違う。)

ジョエル・シャークとジョン・シュワルツ「非ハドロン粒子の双対モデル」(1974)

$$-\frac{1}{2\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad \text{弦理論}$$

超ミクロの宇宙空間で働く重力

$$\text{gravity} \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{0}$$

粒子が点であるとすると、互いにぶつかった瞬間、距離 $r = 0$ となる。つまり、無限大が現れるのは、粒子と粒子の衝突の瞬間である。

5 超弦理論

ポルチンスキー「神の数式」

トフーフト「万物の理論」

アスペン物理学センター（理論物理学者たちの聖地）

ジョン・シュワルツ（CALTEC）・・・神の数式に最も近づいたとされる物理学者。

粒子が点であることを示す数式部分を捨て去り、その部分を弦理論の数式に置き換えて計算した。

$$\mathbf{Z} = \int [Dg] [DA] [D\psi] [D\phi] \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{h} [h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu] \right]$$

↓

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}$$

↓

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m}^\mu \alpha_{\mu n} + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \dots$$

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \psi_{\mu r-n}$$

↓

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \dots$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 \dots)$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m - 2r}{2} G_{m+r}$$

大量の無限大が次々と消え去った。

シュワルツとシャークの数式、

$$\mathbf{Z} = \int [Dg] [DX] [D\psi] \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{h} [h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu] \right\}$$

統一理論（神の数式）への道。

ジョン・シュワルツ「超弦理論」・・・物質は粒子の形（素粒子はミクロな点とされてきた）ではなく、固有に振動する弦である。輪ゴムのような広がりのある形の弦がぶつかっても、その広がり大きさ以下には潰れない。→無限大が現れない。超ミクロの宇宙空間で働く重力。

第 IV 部

異次元宇宙は存在するか ~ 超弦理論 “革命” ~

超弦理論の数式

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int_M d^2\sigma \{ \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \}$$

しかし、この数式は「一般相対性理論」と「素粒子の数式」とはかけ離れて見え、さらに、数式が成立するための条件が現実ではありえないとする見解が出た。

重力を伝える粒子の重さは、実験で「0」と決まっている。ところが、超弦理論で計算すると、その粒子の重さは0にはならなかった。時空の4次元世界で粒子の重さの計算をすると、

$$m = \frac{10(\text{const.}) - 4(\text{dimension})}{4} \neq 0$$

次元が10のとき、重さは0になる。

$$m = \frac{10 - 10}{4} = 0$$

現実の世界は4次元 ($D = \{t, x, y, z\}$) であるのに、超弦理論の式が成り立つのは、この世界が10次元 ($D = 10$) のときだけである。(宇宙は10次元世界として生まれた?)

大多数の物理学者に反対され、シャークは重い糖尿病を患いフランスに帰国、仏教に傾倒していった(34歳没)。研究では10次元に留まらず、この世は $D = 11$ という結果を導くこともあった。いったい異次元はどこに隠れているのか。シュワルツは独り、研究を続けた。

最初の論文から10年後、超弦理論に大きな転機が訪れる。マイケル・グリーン(ケンブリッジ大ルーカス教授職、先代はホーキング、初代はニュートン)がシュワルツとともに異次元の解釈に加わった。

- そもそもこの世が4次元でなければならないという証明はない(数式は存在しない)
- 数式が10次元であると示しているのだから、自分たちの常識が間違っているかもしれない

超弦理論の数式が「神の数式」にふさわしいか、検証することにした。

「超弦理論の数式に、一般相対性理論と素粒子の数式が含まれているかどうかを検証する」

↓

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa_0^2\alpha'} \int d^D x (-G)^{\frac{1}{2}} e^{-2\Phi} \left[\delta G_{\mu\nu} \beta^{G\mu\nu} + \delta B_{\mu\nu} \beta^{B\mu\nu} + \left(2\delta\Phi - \frac{1}{2} G^{\mu\nu} \delta G_{\mu\nu} \right) (\beta_\omega^{G\omega} - 4\beta^\Phi) \right]$$

↓

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} = & \int [Dg] [DA] [D\psi] [D\phi] \\ & \exp\{i \int d^4 x \sqrt{-g} [\frac{1}{2\kappa} R + |D_\mu \phi|^2 \\ & - \frac{1}{24\kappa} e^{-\phi} F_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{24\kappa} \bar{\chi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \chi_\rho \\ & - \frac{1}{4\kappa} \bar{\lambda} \gamma^\mu D_\mu \lambda - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \phi + \frac{1}{8} \phi^2 - \frac{1}{48} \phi^3 + \dots \right) + (i\bar{\psi} \mathbf{D}\psi + h.c.) \\ & - \frac{1}{4\sqrt{2}\kappa} \bar{\chi}_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \lambda \partial_\nu \phi + \frac{1}{96\kappa} e^{-\frac{1}{2}\phi} [\bar{\chi}_{[\mu} \gamma^\mu \gamma^{\rho\sigma\tau} \gamma^\nu \bar{\gamma} \chi_{\nu]} - \sqrt{2} \bar{\chi}_\mu \gamma^{\rho\sigma\tau} \gamma^\mu \lambda] F_{\rho\sigma\tau} \\ & - \frac{1}{24} \frac{1}{g^2} \text{tr} (\bar{\psi} \lambda^{\rho\sigma\tau} \psi) \left(1 + \frac{1}{8} \phi^2 - \frac{1}{48} \phi^3 + \dots \right) F_{\rho\sigma\tau} + (\psi_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c) \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}g^2} e^{-\frac{1}{2}\phi} \text{tr} \left[\left(\bar{\chi}_\mu \gamma^{\rho\sigma} \gamma^\mu \psi - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\lambda} \gamma^{\rho\sigma} \psi \right) F_{\rho\sigma} \right] + \dots \} \end{aligned}$$

数式の変換により、両理論と同じ項が現れるとともに、次々と $n = 496$ という数字が現れ始めた。完全数 (perfect number) の1つである。

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

ユークリッド原論第7巻定義23： 完全数とは自分自身の約数の和に等しい数である。

同第9巻命題36： $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \equiv S_n$ が素数ならば、 $S_n \times 2^{n-1}$ は完全数である。(原文：もし単位から始まり、順次に1対2の比をなす任意個の数が定められ、それらの総和が素数になるようにされ、そして全体が最後の数にかけられてある数をつくるならば、その積は完全数であろう。)

(注) 第7巻の冒頭の定義から、第8巻を経由して、第9巻の最後の命題として証明されている。

この数字が現れた瞬間、超弦理論の数式から一般相対性理論と素粒子の数式が矛盾なく導き出された。

THE THEORY OF EVERYTHING

世界中の物理学者が雪崩を打って超弦理論の研究を始めた。物理学の最前線に

現在、多くの物理学者が宇宙には未知の異次元があると考えている。異次元は、原子の1兆分の1 × 1兆分の1 ($a_{Bohr} \times 10^{-24} = 5.29 \times 10^{-35} \text{m}$) のミクロの世界に存在する。物理学者が考える「カラビヤウ多様体(異次元空間)の一部」。より小さい部分に視点を移すと、隠れていた次元が見えてくる。マクロで見るヒモが1次元であるのに対し、ミクロではその表面が2次元である。

ホーキングが突きつけたブラックホールの2つ目の難問、「熱」。ブラックホールはわずかにエネルギーを放出し、やがては蒸発してしまうという現象の発見。

ブラックホールの奥底では素粒子さえ動けないのに、なぜ熱が発生するのか(ホーキング・パラドクス = 神の数式は存在しない = 超弦理論は認められない)。10年余りが経過。

そして、ポルチンスキーが超弦理論をさらに進化させることに成功。最小単位である弦の性質を見直した。数式から導かれたのは、超ミクロの世界では、服の繊維のように膨大な数の弦がまとまっており、膜(Dプレーン、初期宇宙の重要な「粒子」)のように動いている現象。10次元の膜は折り畳まれ、4次元では1点に見える。ブラックホールの奥底には大量の膜が存在することが、数式から導かれた。

超弦理論の数式

$$-\frac{1}{2\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{h} [h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu]$$

膜の数式

$$+i\mu_\rho \int_{\rho+1} \text{Tr} [\exp(2\pi\alpha' F_2 + B_2) \wedge \sum C]$$

これにより、ブラックホールの熱が説明された。

ホーキングが指摘した「謎の熱」

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4G} A \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{Q_H Q_F^2}{2}}
\end{aligned}$$

ブラックホールの奥底で、異次元の世界を膜状に集まった弦が動き、そこで熱が発生している。

カムラン・バファが「謎の熱」を計算するにあたり、まずブラックホールの奥底がどのような形になっているかを考えた。ブラックホールの奥底にも異次元が存在する。膜は異次元に絡みつき、膜の中の弦そのものも動き回る。それが熱を生み出す正体である。その熱を計算。

$$M = \frac{K 3^{\otimes [\frac{1}{2} Q_F^2 + 1]}}{S_{[\frac{1}{2} Q_F^2 + 1]}}$$

$$\bar{L}_0 = \frac{1}{2} (H - P) = 0$$

$$c = 6k, L_0 = n, n \gg 1$$

$$d(n, l) \sim \exp(2\pi\sqrt{nc6})$$

$$c = 6 \left(\frac{1}{2} Q_F^2 + 1 \right) \cdot n = Q_H$$

$$S = \ln d(Q_F, Q_H) \sim 2\pi \sqrt{Q_H \left(\frac{1}{2} Q_F^2 + 1 \right)} \sim 2\pi \sqrt{\frac{Q_H Q_F^2}{2}}$$

ホーキングが示した熱の式と一致した。

2004年、それを検証したホーキングは自らの主張の誤りを認めた。しかしその原理は、ホーキング・パラドクスが提唱されたことで、解明されたのである。

現在、超弦理論の予言を検証しようとする試みがされている。米、重力波検出実験施設 LIGO、超大型干渉望遠鏡 VLA。CERN・欧、ヒッグス粒子の次のターゲット = ミクロの異

次元。

現在、エドワード・ウィッテン（フィールズ賞受賞）が超弦理論を牽引している。

提唱するのは、M 理論（M Theory）で、それまで知られていた5つの超弦理論を統一した。今、最も神の数式に近いとされている。

M 理論が突きつける新たな難問、11次元の世界。

しかも、 10^{500} 個の宇宙が今も生まれ、消えているという。